

Renate RASCH, Kerstin SITTER, Landau

## **Module für den Geometrieunterricht der Jahrgangsstufen 1-6**

### **Grundlegendes**

Bei der Entwicklung der Module orientierten wir uns zum einen an den Untersuchungen von Piaget und Inhelder zur Konstruktion des geometrischen Raumes und zum anderen an den Niveaustufen des geometrischen Denkens, die von Pierre und Dina van Hiele Ende der 1950er Jahre empirisch erarbeitet wurden. Von Piaget nahmen wir Hinweise zur Komplexität geometrischer Figuren in Abhängigkeit vom Alter der Kinder auf. Die Denkebenen der van Hieles waren grundlegend für das Erfassen und Beschreiben der Entwicklung der Schülerinnen und Schüler. Bei der Erarbeitung von Testaufgaben orientierten wir uns an den ersten drei Niveaus: dem geometrisch-anschauungsgebunden Denken, dem geometrisch-analysierenden Denken und dem geometrisch-abstrahierenden Denken. Dabei stand insbesondere die Frage im Fokus, inwieweit es durch einen modulartigen Aufbau eines Geometrielehrgangs möglich ist, das zuletzt genannte Denkniveau, das die Fähigkeit beschreibt, Beziehungen innerhalb und zwischen Figuren zu erfassen, schon in der Grundschule zu erreichen. In den Ansatz flossen darüber hinaus zahlreiche Beobachtungen aus dem Geometrieunterricht, die bspw. zu folgenden Fragen führten: Wie gelingt es, die Vorerfahrungen der Kinder zu Viereck, Dreieck, Kreis, Würfel weiterzuentwickeln oder wie können Figuren wie der Quader besser eingeordnet werden, damit sie keine schwer durchschaubaren Einzelstücke bleiben.

### **Konzept**

Im Zentrum des Konzepts stehen Module, in denen die jeweiligen Inhalte so zusammengestellt wurden, dass zahlreiche Beziehungen Berücksichtigung finden. Wir orientierten uns zum Teil an bewährten geometrischen Kernideen wie dem Achsenkreuz oder dem „Streifen“, bei denen die Beziehungen „senkrecht bzw. parallel zueinander“ schon immanent sind. Durch die Module soll das Durchdringen geometrischer Inhalte ausgehend von zugrunde liegenden Strukturen angeregt werden. Auf dieser Basis kann Geometrie, die in der Umwelt steckt, entdeckt und bewusst werden. Im Zusammenhang mit der Umsetzung der Module im Unterricht entstanden offene Aufgaben, kopfgeometrische Aufgabenstellungen und Aufgaben zum Erklären und Argumentieren. Mit den offenen Arbeitsaufträgen wollen wir der Heterogenität der Schülerschaft Rechnung tragen. Mit den Aufgaben zur Kopfgeometrie soll das gedankliche Arbeiten gefördert und Erarbeitetes bewusster werden. Das Anwenden der Fachsprache im Zusammenhang mit inhaltlichen Überlegungen kann durch Aufgaben zum Erklären und Ar-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

gumentieren vorangebracht werden. Ein dritter Baustein sind Aktivitäten wie das Falten und Skizzieren.

Die Module sind klassenstufenübergreifend angelegt. Die Lehrkräfte können das gesamte Modul nutzen oder nur einzelne Sequenzen entnehmen. In den ersten Modulen (M1, M2 -Faltwinkel und Achsenkreuz) sind vor allem Grundbegriffe wie Gerade, Punkt, Strecke aber auch Relationsbegriffe wie „senkrecht und parallel zueinander“ enthalten. Wenn es möglich ist, wird auch auf Gemeinsamkeiten in der Sprache verwiesen (rechter Winkel – Rechteck; parallel zueinander – Parallelogramm). Drei Module (M3, M7, M8) stellen die Dreiecke in den Mittelpunkt. Im Modul M3 werden die Vorerfahrungen der Kinder zu Dreiecken aufgegriffen und unterschiedliche Dreiecksformen bewusst gemacht. Die späteren Module verweisen auf die Dreiecksform, die den Kindern im Quadrat begegnet und dem Zeichengerät „Geometriedreieck“ entspricht bzw. stellen das gleichseitige Dreieck in den Mittelpunkt. In den Modulen M4 und M5 stehen die Vierecke im Zentrum. Ausgehend vom unregelmäßigen Viereck wird in die Figurengruppe eingeführt. Die teilweise aus den ersten Modulen schon bekannten Vierecke werden wieder aufgegriffen, weitere Vierecksarten dazugewonnen und zum „Haus der Vierecke“ zusammengestellt. Im Modul M5 wird die Kernidee „Streifen“ genutzt, um zunächst zu den Trapezen und im Anschluss zu schon bekannten Vierecken durch das Übereinanderlegen von Streifen zu führen. Im Modul M6 sind Inhalte zum Kreis und zur Geometrie im Kreis enthalten. In den Modulen M9 bis M11 werden die geometrischen Körper thematisiert. Diese spielen in den vorangegangenen Modulen im Zusammenhang mit den Flächen auch schon eine Rolle und werden in diesen Modulen ausgehend von ihren Eigenschaften Körpergruppen (M10 Spitzkörper, M11 Säulen,) zugeordnet. Im Zentrum des Moduls M12 steht die Vorlage für das Legespiel „Tangram“, die sich gut für das Entdecken weiterer Strukturen im Zusammenhang mit der Ähnlichkeit und Teil-Ganzes-Beziehungen eignet. Ausgehend von den unregelmäßigen Vielecken werden im Modul M13 Vielecke wie Sechseck und Achteck betrachtet. Im Modul M14 werden Symmetrieeigenschaften zusammengefasst und durch die Symmetrie im Raum erweitert.

## **Evaluierung**

Die Möglichkeit zur Evaluierung des Konzeptes hatten wir im Rahmen des SINUS-Saarland Fortsetzungsprojektes, das insgesamt über eineinhalb Schuljahre (November 2013 – März 2015) gelaufen ist. Am Projekt beteiligt waren 17 SINUS-Grundschulen sowie zwei weiterführende Schulen des Saarlandes (N = 413 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 1-5). Um die Wirksamkeit des modular angelegten Unterrichtskonzeptes

hinsichtlich der Entwicklung geometrischen Wissens und Könnens untersuchen zu können, wurde ein Pre-Post-Test-Kontrollgruppen-Design mit 23 Experimental- und 4 Kontrollgruppen gewählt. Während die Experimentalgruppen (EG) durch eine an der modularen Ausbildung teilnehmenden Lehrkraft unterrichtet wurden (vierzehntägig eine Unterrichtsstunde), erweiterten die Kontrollgruppen (KG) ihr geometrischen Wissen und Können nach dem „klassischen Unterrichtsstil“ mit einer regulären Lehrkraft. Eine konkrete Vorgabe bezüglich zu entwickelnder Fähigkeiten und Fertigkeiten erhielten die Lehrerinnen und Lehrer der KG dabei in Form eines adaptierten Kernlehrplanes des Saarlandes, bei dem u. a. wichtige Begrifflichkeiten und Figuren, die im Rahmen des Unterrichts in den EG eine Rolle spielten, ergänzt wurden. Bezüglich des Verhältnisses von EG und KG sei angemerkt, dass dieses als nicht ausgewogen betrachtet werden kann. Die im Folgenden dargestellten Ergebnisse können folglich also auch nicht als repräsentativ, sondern vielmehr als Tendenzen angesehen werden. Zur Datenerhebung herangezogen wurde zweierlei: zum einen eigens entwickelte Testaufgaben zur Erfassung geometrischer Fähigkeiten und Fertigkeiten, zum anderen ein Lehrerfragebogen zur Gewinnung einer Momentaufnahme zur gegenwärtigen und durch die modulare Ausbildung beeinflussten Unterrichtspraxis des Geometrieunterrichts bei den Experimentallehrkräften. Um in allen Klassenstufen identische Aufgaben stellen zu können, wurden sieben offene Aufgaben gewählt, die auf der Grundlage des van Hiele-Modells entstanden sind, jedoch auch weitere theoretische Grundlagen miteinbeziehen. Welche Figuren die Schülerinnen und Schüler so ganzheitlich, ohne dass dabei erste Eigenschaften eine nachweisbare Rolle spielen, darstellen und benennen können (Niveau 0), wurde mit den ersten beiden Aufgaben erfasst. Die Entwicklung zu Kenntnissen von Eigenschaften zu Figuren (Niveau 1) wurde mit den Aufgaben 3 und 4 genauer untersucht, indem ausgewählte Flächen bzw. Körper von den Lernenden skizziert und beschrieben werden sollten. Inwiefern die Schülerinnen und Schüler gezielte, sich auf Niveau 2 des van Hiele-Modells beziehende Aussagen treffen können, sollte mit den drei abschließenden Aufgaben genauer analysiert werden: zum einen sollten hier die Verwandtschaft zweier Flächen (Aufgabe 5), zum anderen die höchste Anzahl der Symmetrieachsen des Quadrates unter den Vierecken (Aufgabe 6) begründet werden. Im Mittelpunkt von Aufgabe 7 stand das Tangram. Im Folgenden dargestellt werden ausgewählte Ergebnisse zu den Aufgaben 3 und 5. Für eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse (sowie des gesamten Konzeptes) siehe Rasch & Sitter (ersch. 2016).

Die Beschreibung ausgewählter Flächen (*Aufgabe 3*) gelang im Pretest, unabhängig von EG und KG, nicht allen Lernenden. Zum Teil kam keine oder

eine falsche Antwort (12 bis 28 Prozent), zum Teil entsprach die Beschreibung Niveau 0 nach van Hiele (0 bis 33 Prozent). Bei einem Großteil der Kinder (49 bis 85 Prozent) konnten jedoch auch schon im Pretest über ihre Eigenschaften differenzierte Beschreibungen von Figuren identifiziert werden. Waren diese zum Projektstart jedoch noch vordergründig einfach, einschrittig und anschauungsgebunden, so konnten vor allem in den EG zum Projektende erste Fortschritte hin zu spezifischen, ja sogar beziehungshaltigen Beschreibungen (2 bis 20 Prozent) beobachtet werden. In den KG war dies nicht der Fall. Bezüglich der Begründung der Verwandtschaft zweier Flächen (*Aufgabe 5*) bleibt festzuhalten, dass sich auch hier die EG durch ein über die Projektlaufzeit nicht nur umfassenderes, sondern vor allem auch beziehungshaltigeres Wissen von den KG abhoben. War ein Großteil der Kinder, unabhängig von EG und KG, zum Projektstart noch nicht in der Lage zwei verwandte Flächen zu identifizieren (30 bis 40, in Klasse 5 sogar 67 Prozent), so konnte dieser Anteil vor allem in den EG über die Projektlaufzeit deutlich minimiert und die Anzahl an einfachen, anschauungsgebundenen bis hin zu mehrschrittigen, auf spezielle Eigenschaften bezogenen Begründungen, erhöht werden. In den KG wurde die Stufe der mehrschrittigen, auf spezielle Eigenschaften bezogenen Begründungen zum Post-Test zum Projektende hingegen nur in Klasse 3 erreicht. Der Anteil an nicht bearbeiteten bzw. falsch identifizierten Beziehungen konnte über die Projektlaufzeit hier zudem nicht wesentlich minimiert werden.

Insgesamt betrachtet hat sich das Konzept des modular angelegten Unterrichts bewährt. Das geometrische Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler aus den EG wurde im Vergleich zu den KG in der Projektlaufzeit nicht nur umfassender, sondern entsprechend der van Hiele-Niveaustufen spezifischer, vor allem auch beziehungshaltiger. Wird der vorgestellte Zugang, der zielgerichtet den Erwerb geometrischen Wissens anstrebt und von Anfang an auf Zusammenhänge aufmerksam macht, über einen längeren Zeitraum verfolgt, so kann folglich von nachhaltigen Lerneffekten im Geometrieunterricht ausgegangen werden.

## **Literatur**

- Rasch, R. & Sitter, K. (ersch. 2016). Module für den Geometrieunterricht in der Grundschule: Geometrie handlungsorientiert unterrichten und beziehungshaltig entdecken. Klett/Kallmeyer.
- van Hiele, P.M. (1984). The Child's Thought and Geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Hrsg.), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldorf and Pierre M. van Hiele. Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.

Wittmann, B.(2010). Jean Piaget und die spontane Geometrie des Kindes. In: Spuren erzeugen. Diophanes.